五一后，期中考试，RJ 线性代数.

考试后 课程内容 Topics

解线性方程组（消元法）

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, (+,-,\times,\div,0,1) = \mathbb{K}$ 域.

$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ p 素数. $\mathbb{Q}(i) = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Q},\ i^2=-1\}$

$\boxed{\mathbb{K}^n}$

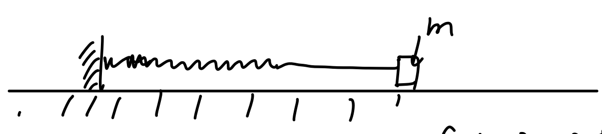
第二个推广方向：一般的线性空间（向量空间）

vector space, linear space

例：求解 $[0,\infty)$ 上的光滑函数（无穷次可导）$f(t)$ 满足方程：

$$(*)\quad \boxed{f''(t) + f(t) = 0}$$

（一端约束的理想的弹簧）（谐振子）



$f(t)$ 时刻 t 的 m 的位置.

解的结构 $f(t) = x_1 \sin(t) + x_2 \cos(t)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

(**) $f''(t) + f(t) = \boxed{\sin t}$ (有外力作用)

解结构 $f(t) = \underbrace{-\frac{1}{2} t \cos t}_{\text{特解}} + \underbrace{x_1 \sin(t) + x_2 \cos(t)}_{(*)\text{ 齐次方程的解}}$

$\mathbb{K}$ - 域， $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

定义: V 集合，有以下结构，则称 V 是 $\mathbb{K}$-vector space.

① 加法: $V \times V \to V$, $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$

② 数乘: $\mathbb{K} \times V \to V$, $(c, v) \mapsto c \cdot v$

(或者 cv)

满足: ① 加法: 交换，结合律，有"0"向量 $\boxed{0 + v = v}$

($(V, +)$ Abelian group) 有逆 对 v，存在 $-v$, s.t. $v + (-v) = 0$

② 数乘: $(\mathbb{K}, +, \times, 1)$ $c_1, c_2 \in \mathbb{K}, v \in V$.

结合: $(c_1 c_2) \underset{\text{数乘}}{\cdot} v = c_1 \cdot (c_2 \cdot v)$

"1": $1 \cdot v = v$

③ 分配律: $(c_1+c_2)\cdot v = c_1\cdot v + c_2\cdot v$

$c(v+w) = \underbrace{c\cdot v + c\cdot w}$

$c_1, c_2, c \in \mathbb{K}$, $v, w \in V$.

例子: $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$.

① $\mathbb{R}^n, +, \cdot$.

② $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 W.

③ $V = \{ f(t) \mid f(t)$ 是 $t\in[0,\infty)$ 上的光滑函数$\}$

$\overset{\text{记作}}{=} C^\infty([0,+\infty))$

"well-defined"

1. 加法: $\underline{(f_1+f_2)(t)} \overset{\text{定义}}{=} \underline{f_1(t)} + \underline{f_2(t)}$

2. 数乘 (Scalar multiplication) $(c\cdot f)(t) \overset{\text{定义}}{=} c\cdot f(t)$

第一步

$f_1+f_2 \in C^\infty([0,\infty))$

cf

0 向量. "0" = 常值取 0 的函数

"0"$(t) = 0$

更多例子: $\boxed{M_{n\times n}(\mathbb{R})}$, $+$, $\cdot$

$\mathbb{R}[t] \overset{\mathbb{R}-}{=} \{\text{polynomials of } t\}$

$\boxed{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ $\mathbb{R}[t]_{\deg \leq n} = \{$次数小于等于 n 次的多项式$\}$
$\deg \leq n$.

$\{n\times n$ 上三角阵$\} \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$

非例子:

$GL_n(\mathbb{R}) = \{$可逆 $n\times n$ 实矩阵$\}$

通常的"+"在 $GL_n(\mathbb{R})$ 上不能定义.

"不封闭", $A + (-A) = 0 \notin GL_n(\mathbb{R})$

$\{\deg = n \text{ polynomials of } t\}$ "+"不封闭

问题: $\mathbb{R}^n$ 中子空间能搬到 V 上吗?

非空 $W \subset V$, "+". "·"封闭.

性质: $0 \cdot v = \vec{0}$

$0 \in \mathbb{K},\ v \in V.$

$(-1) \cdot v = -v$

$\in \mathbb{K} \quad \in V, \quad \in V.$

留作练习

证明: $(0+0) \cdot v = 0 \cdot v$

$= 0 \cdot v + 0 \cdot v$

$\underline{(-(0 \cdot v)) + 0 \cdot v} = (-0 \cdot v) + ((0 \cdot v) + (0 \cdot v))$

$\Rightarrow \vec{0} = 0 \cdot v$

所有用加法、数乘定义的东西都可以对 V 定义.

(线性相关、线性无关、向量组的秩)

"除了一个点"

$\{v_i\}_{i \in I},\quad v_i \in V,\quad a_i \in \mathbb{K}$

线性组合 $a_{i_1} v_{i_1} + \cdots + a_{i_k} v_{i_k}$ k 正整数.

$\{v_i\}_{i \in I}$ 线性相关, 有某种

$a_{i_1} v_{i_1} + \cdots + a_{i_k} v_{i_k} = 0$, $a_{i_1} \cdots a_{i_k}$ 不全为 0

存在某一个有限的向量组线性相关.

$\{v_i\}_{i\in I}$ 线性无关，即任意有限向量组线性无关

$\{v_i\}_{i\in I}$ I 无穷时，极大线性无关组的存在性

$V=\mathbb{R}^n$ 中，$v_1\cdots v_k$，$k>n$ 一定线性相关

一般 V，不知道有没有一个 n，$v_1\cdots v_k$，$k>n$ 一定线性相关

集合论的工具（Zorn 引理）$\Rightarrow$ 对于一般 V 存在极大线性无关组（即基）

例：$\mathbb{R}[t]$ 有 $1, t, t^2, \cdots$ 极大线性无关组（多验证）

$\dim=\infty$。"主要"研究 $\dim<\infty$ 的情形

重复（重要） $\dim=$ 基中向量个数。

基：$\left\{\begin{array}{l} ① \ \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v_i\}_{i\in I} = V \\ ② \ \{v_i\}_{i\in I} \text{ linearly independent.} \end{array}\right.$

③ $\underbrace{\dim_{\mathbb{K}} V}_{\text{要求} < \infty} = |I|$

三选二 ⟹ 基.

例子：$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 有基．$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \\ j\text{列} & \end{array}$

$\dim_{\mathbb{R}} M_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t]_{\le n} = n+1.$ $\underline{1, t, t^2 \ldots t^n}$

$\{(n+1)$ 个变元的 d 次齐次多项式$\} = V.$ (0多算在内)

(x_0, x_1, x_2) $(n+1)$ 3个

$\underline{x_0^3 x_1} + x_0^4 + 2x_1^2 x_2^2$ $d = 4$次

......

$\dim V = \boxed{\binom{n+d}{d}}$

例: $V = \left\{ \dfrac{at^2+bt+c}{t^3-t} \;\middle|\; a, b, \in \mathbb{R} \right\}$

逐数.

$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} V = 3.}$ 基 B: $\dfrac{t^2}{t^3-t}$, $\dfrac{t}{t^3-t}$, $\dfrac{1}{t^3-t}$

C: $\dfrac{1}{t}$, $\dfrac{1}{t-1}$, $\dfrac{1}{t+1}$ $\int \dfrac{1}{t+1} dt = \ln(t+1) + C$

C 线性无关. $\dfrac{a_1}{t} + \dfrac{a_2}{t-1} + \dfrac{a_3}{t+1} = 0$

$\lim_{t \to 0} = 0$, $\Rightarrow a_1 = 0$.

同理 $t \to 1$, $t \to -1$ $a_2 = a_3 = 0$

C 基. (有利于作 $\int dt$)

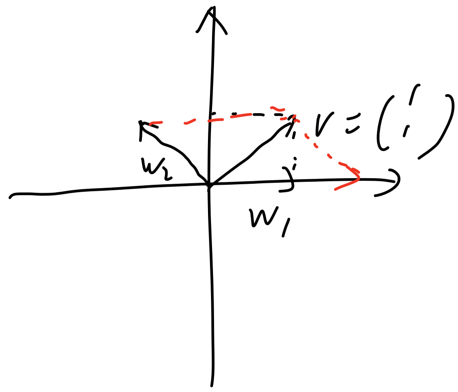
向量的坐标表示.

定义: V 线性空间, 有基 B: $v_1 \cdots v_n$.

则 $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. $a_i \in \mathbb{K}$.

称 $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. 是 V 在 B 下的坐标，记 $[v]_B$

例如: $\mathbb{R}^2$



$B=\{e_1, e_2\}$, $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad [v]_B = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$C = \{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}_{w_2}\}$ $\quad [v]_C = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$v = 2w_1 + w_2$.

$v = \dfrac{3t^2+t+2}{t^3-t}$, $\quad [v]_B = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ (与顺序有关)

B: $\dfrac{1}{t^3-t}, \dfrac{t}{t^3-t}, \dfrac{t^2}{t^3-t}$.

C: $\dfrac{1}{t} = w_1$, $\dfrac{1}{t-1} = w_2$, $\dfrac{1}{t+1} = w_3$

$\boxed{[v]_C}$ 更有利于作积分.

问题：由 $[v]_B$ 得到 $[v]_C$?

坐标表示的转换矩阵

$B: v_1 \cdots v_n$. $C: w_1 \cdots w_n$ 两组 V 的基.

$$v = \underline{(v_1 \cdots v_n)} \cdot [v]_B = (w_1 \cdots w_n) \cdot [v]_C$$

$$\underline{(v_1 \cdots v_n)} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$a_i \in \mathbb{K}$

∵ 线性组合的复合是矩阵乘法 ∴

$$v_1 = (w_1 \cdots w_n) \cdot [v_1]_C, \quad v_2 = (w_1 \cdots w_n) \cdot [v_2]_C$$

$$\underline{(v_1 \cdots v_n)} = (w_1 \cdots w_n) \cdot \underbrace{\left(\underline{[v_1]_C}, \underline{[v_2]_C}, \cdots \underline{[v_n]_C} \right)}_{P_{C \leftarrow B}}$$

数乘之后加法.

$$\Rightarrow v = (v_1 \cdots v_n)\cdot [v]_B$$

$$= \underline{\left((w_1 \cdots w_n)\cdot P_{C\leftarrow B}\right)}\cdot \underline{[v]}_B .$$

$$\Downarrow$$

$$= (w_1 \cdots w_n)\cdot \underline{(P_{C\leftarrow B}\cdot [v]_B)}$$

数乘，V中加法　　　　K中乘法，加法

$$= (w_1 \cdots w_n)\cdot [v]_C$$

由唯一性.

$$\Rightarrow (P_{C\leftarrow B})\cdot [v]_B = [v]_C$$

定义：$P_{C\leftarrow B}$ 称为基的转换矩阵

定理：
1. $[v]_C = \underline{P_{C\leftarrow B}}\,[v]_B$ ✓.
2. $\underline{P_{B_3\leftarrow B_1}} = \underline{P_{B_3\leftarrow B_2}}\ \underline{P_{B_2\leftarrow B_1}}$
3. $P_{B\leftarrow B} = I_n$.
4. $P_{C\leftarrow B} = (P_{B\leftarrow C})^{-1}$.

例: 想要 $[v]_C$ $\boxed{[v]_B}$. $\boxed{P_{B\leftarrow C}}$

$$P_{C\leftarrow B} = (P_{B\leftarrow C})^{-1}$$

$C: \frac{1}{t}, \frac{1}{t-1}, \frac{1}{t+1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = P_{B\leftarrow C}$

$B: \frac{1}{t^3-t}, \frac{t}{t^3-t}, \frac{t^2}{t^3-t}.$

$$P_{C\leftarrow B} = (P_{B\leftarrow C})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

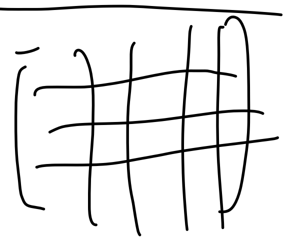
证: ② $[v]_{B_3} = \boxed{P_{B_3\leftarrow B_1}} \cdot \boxed{[v]_{B_1}}$

$= (P_{B_3\leftarrow B_2}) \cdot [v]_{B_2}$

$= P_{B_3\leftarrow B_2} \cdot (P_{B_2\leftarrow B_1} [v]_{B_1})$

$= \underbrace{\left(P_{B_3 \leftarrow B_2} \cdot P_{B_2 \leftarrow B_1}\right)} \cdot \boxed{[v]_{B_1}}$

直觉 $\underline{M_{m\times n}(\mathbb{R})}$ $\underline{\mathbb{R}^{mn}}$ 相同.



不同的线性空间之间 (关系, 线性映射)

同构

线性映射.

定义: V, W 是 K-线性空间.

$T: V \to W$ 映射.

称 $T: V \to W$ 线性映射.

如果 ① $T(v+w) = T(v) + T(w)$

② $T(c\cdot v) = c\cdot T(v)$